

***Miejsce na naklejkę.***

*Sprawdź, czy kod na naklejce to* **M-660**.

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

|  |  |
| --- | --- |
| **WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY** |  |
|  |
|  **KOD PESEL** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |
| --- |
| **EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI** **Poziom rozszerzony****Arkusz pokazowy**Termin: **4 marca 2022 r.**Czas pracy: **do 270 minut**Liczba punktów do uzyskania: **50** |

MMAP-R0-**660**-2203

|  |
| --- |
| **WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY** |
| Uprawnienia zdającego do:

|  |  |
| --- | --- |
|  | dostosowania zasad oceniania |

|  |  |
| --- | --- |
|  | dostosowania w zw. z dyskalkulią |

|  |  |
| --- | --- |
|  | nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę. |

  |

**Instrukcja dla zdającego**

1. Arkusz zawiera 11 zadań.
2. Obok każdego numeru zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
3. Odpowiedzi zapisuj na kartkach dołączonych do arkusza, na których zespół nadzorujący wpisał Twój numer PESEL.
4. W rozwiązaniach zadań otwartych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. W razie pomyłki błędny zapis zapunktuj.
6. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla oraz kalkulatora prostego.

W zadaniach od 1. do 11. zapisz rozwiązania. Pamiętaj o podaniu numeru zadania.

 Zadanie 1. (0–3)

 Dane są liczby $a=log\_{2}3$ oraz $b=log\_{3}7$.

Wyraź $log\_{4}49$ za pomocą liczb $a$ oraz $b$.

Zapisz obliczenia.

 Zadanie 2. (0–3)

 Funkcja $f$ jest określona wzorem

$f\left(x\right)=\frac{x^{2}+3}{x-1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\ne 1$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P=\left(-3, -3\right)$.

Zapisz obliczenia.

 Zadanie 3. (0–4)

 Dany jest nieskończony ciąg geometryczny $\left(a\_{n}\right)$, określony dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu $\left(a\_{n}\right)$ jest równa $7$, a suma $S$ wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $8$.

Wyznacz wszystkie wartości $n$, dla których spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{S-S\_{n}}{S\_{n}}\right|<0,001$$

gdzie $S\_{n}$ oznacza sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu $\left(a\_{n}\right)$.

Zapisz obliczenia.

 Zadanie 4. (0–5)

 Dane jest równanie

$$\left(x-6\right)⋅\left[\left(m-2\right)x^{2}-4\left(m+3\right)x+m+1\right]=0$$

z niewiadomą $x$ i parametrem $m\in R$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku.

Zapisz obliczenia.

 Zadanie 5. (0–3)

 Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez $4$ jest liczbą podzielną przez $36$.

 Zadanie 6.

 Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych $\left(x, y\right)$ za pomocą fragmentów wykresów funkcji $f$ oraz $g$ tworzących krzywą zamkniętą $APOBA$ (jak na rysunku).

Funkcje $f$ oraz $g$ są określone wzorami

$f\left(x\right)=x^{2}$ oraz

$g\left(x\right)=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}+4$.

Wykresy tych funkcji przecinają się w punktach $A$ i $B$.

Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu jeziora w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt $P=\left(-1, 1\right)$.

O

1

A

B

x

g

f

y

1

P

−1

−2

2

 Zadanie 6.1. (0–2)

 Niech $R$ będzie punktem leżącym na wykresie funkcji $g$.

Wykaż, że odległość punktu $R$ od punktu $P$ wyraża się wzorem

$$\left|PR\right|=\sqrt{\frac{1}{4}x^{4}-\frac{1}{2}x^{3}-\frac{13}{8}x^{2}+\frac{39}{8}x+\frac{593}{64}}$$

gdzie $x$ jest pierwszą współrzędną punktu $R$.

 Zadanie 6.2. (0–6)

 Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej.

Oblicz współrzędne punktu $K$, w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca $K$ toru od początku $P$) była możliwie największa. Oblicz długość najdłuższego toru.

Zapisz obliczenia.

Wskazówka.

Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu $R$ leżącego na wykresie funkcji $g$ od punktu $P$ wyraża się wzorem

$$\left|PR\right|=\sqrt{\frac{1}{4}x^{4}-\frac{1}{2}x^{3}-\frac{13}{8}x^{2}+\frac{39}{8}x+\frac{593}{64}}$$

gdzie $x$ jest pierwszą współrzędną punktu $R$.

 Zadanie 7. (0–4)

 Rozwiąż równanie

$$\sin(\left(3x\right))=2\sin(x)$$

w zbiorze $\left[0, π\right]$.

Zapisz obliczenia.

 Zadanie 8. (0–4)

 Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie $l$ i podstawach $AB$ oraz $CD$ takich, że $\left|AB\right|>\left|CD\right|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna $AC$ trapezu ma długość $d$ (jak na rysunku).

Wykaż, że promień $R$ okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\frac{d⋅l}{2\sqrt{16d^{2}-l^{2}}}$ .

D

A

C

B

R

d

 Zadanie 9. (0–6)

 W kartezjańskim układzie współrzędnych $\left(x, y\right)$ punkt $A=\left(9, 12\right)$ jest wierzchołkiem trójkąta $ABC$. Prosta $k$ o równaniu $y=\frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta $ABC$ tego trójkąta. Okrąg $O$ o równaniu $\left(x-8\right)^{2}+\left(y-4\right)^{2}=16$ jest wpisany w ten trójkąt.

Oblicz współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki $B$ i $C$ tego trójkąta z okręgiem $O$.

Zapisz obliczenia.

 Zadanie 10. (0–6)

 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym $P$. Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka $S$ ma miarę $2α$. Objętość tego ostrosłupa jest równa

$\sqrt{k⋅P^{3}⋅\sin(α)⋅\cos(\left(2α\right))}$,

gdzie $k$ jest stałym współczynnikiem liczbowym.

Oblicz współczynnik $k$.

Zapisz obliczenia.

 Zadanie 11. (0–4)

 Egzamin składa się z $15$ zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej $11$ zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź.

Przyjmij, że w każdym zadaniu wybór każdej z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin.

Zapisz obliczenia.

Koniec